経済統計分析［期末試験］解答例

別所俊一郎

多岐選択：配点 20 点

(a)〜(d) のうち，最も適切なものを 1 つ選びなさい（各 2 点）.

1) OLS 推定において被説明変数の値を 100 倍して，説明変数の値を 10 万倍するとき，

(a) 傾きの OLS 推定値は変化しない
(b) 切片の OLS 推定値は変化しない
(c) 回帰の R^2 は変化しない
(d) OLS 推定量の，分散不均一性に頑健な標準誤差は変化しない

答：c

2) 重回帰分析での自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ は

(a) 負の値をとらない
(b) 決定係数 R^2 より大きな値は取らない
(c) 相関係数の 2 乗に等しい
(d) 説明変数が追加されるときには，減少しない

答：b

3) t 統計量の絶対値が標準正規分布の閾値（critical value）より大きいとき，

(a) 回帰分析の結果が有意だということができる
(b) 帰無仮説を棄却できる
(c) 誤差項の分散が均一だという仮説を棄却できる
(d) 実現値が回帰線（regression line）に十分近いと結論できる

答：b

4) 回帰式 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 D_i + \beta_3 (X_i \times D_i) + u_i$ （X_i は連続変数，D_i はダミー変数とする）において，2 本の回帰線が同一かどうか検定するために用いる検定統計量は，

(a) $\beta_2 = 0$，$\beta_3 = 0$ のそれぞれに対する t 統計量
(b) $\beta_0 = 0$ かつ $\beta_1 = 0$ という結合仮説に対する F 統計量
(c) $\beta_3 = 0$ に対する t 統計量

(d) $\beta_2 = 0$ かつ $\beta_3 = 0$ という結合仮説に対する F 統計量

答：d

5) 回帰式 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_i) + u_i$ における傾きの係数が意味するところは,

(a) X が 1%変化したときに，Y は β_1%変化する
(b) X が 1%変化したときに，Y は $0.01 \times \beta_1$ 変化する
(c) X が 1 単位変化したときに，Y は $100\beta_1$%変化する
(d) X が 1 単位変化したときに，Y は β_1 変化する

答：b

6) 回帰分析に際して説明変数を 1 つ追加するとき,

(a) その変数が重要なものであれば，回帰の R^2 が減少する
(b) その変数を除外することによる省略変数バイアスの可能性を除去できる
(c) その変数の係数についての t 統計量が 1%水準で統計的に有意であるときに限って，その変数を追加する
(d) 注目している係数の推定量の分散が小さくなる

答：b

7) 給与所得の調査をすると，年収を 100 万円単位で（300 万円，400 万円，500 万円など）回答する個人がかなりの割合で存在する．このような現象は,

(a) 測定誤差バイアスの一例である
(b) サンプルセレクションバイアスの一例である
(c) 同時的な因果関係の一例である
(d) 100 万円単位で給与交渉をする企業の一例である

答：a

8) 回帰の誤差に観測値間での相関があると,

(a) OLS の標準誤差が正しく推定されない
(b) OLS 推定量は一致性をもたないが，不偏性は保たれる
(c) 分散不均一性に頑健な（heteroskedasticity-robust）標準誤差を用いれば，OLS の標準誤差は正しく推定される
(d) クロスセクションデータでは，データを入れ替えることができるので，問題にならない

答：a

9) 弱い操作変数（weak instruments）が問題になるのは,

(a) サンプルサイズが大きくても，2 段階最小 2 乗推定量が正規分布でうまく近似されないからである

(b) 操作変数が外生でなくなってしまうからである

(c) 2 段階最小 2 乗推定量が計算できなくなってしまうからである

(d) 1 段階目で内生変数のあてはめ値を得ることができなくなってしまうからである

答：a

10) 丁度識別（exact identified）のとき,

(a) 過剰識別制約の検定において，J 統計量を用いることができる

(b) 2 段階最小 2 乗推定を用いることができない

(c) 操作変数の外生性を検討するときには，制度的特性等の，その問題についての計量経済学以外の知識を活用しなければならない

(d) OLS と 2 段階最小 2 乗推定は同じ推定値を与える

答：c

記述問題 1：配点 40 点

ケインズは限界消費性向（$\mathrm{MPC} = \Delta C/\Delta Y_{pd}$）はゼロと 1 のあいだにあると仮定しました．また，平均消費性向（$\mathrm{APC} = C/Y_{pd}$）は可処分恒常所得 Y_{pd} が増加するにつれて減少すると仮定しました．以下の問いに答えなさい．

1) ケインズ型の線形の消費関数を特定化しなさい．また，平均消費性向が可処分所得の減少関数であるという仮定が，消費関数の正の定数の存在を想定していることを示しなさい（5 点）．

   ケインズ型の消費関数は $C_t = c_0 + c_1 Y_t$ と定式化される．ここで，MPC は c_1 に等しく，APC は $c_0/Y_t + c_1$ で与えられる．APC が可処分所得の減少関数であるためには，$c_0 > 0$ が正でなければならないから，消費関数の定数部分が正であることが想定される．

2) 10 年間の年次のマクロデータを用い，消費関数を OLS 推定したところ，次のような結果を得ました（カッコ内は標準誤差）．

$$\begin{array}{llllll} C_t = & 981.35 & + & 0.735 & Y_{pd,t}, & R^2 = 0.98, \quad \mathrm{SER} = 50.65 \\ & (158.65) & & (0.038) & & \end{array}$$

OLS 推定が適切なものとなるための仮定が満たされているとみなして，MPC が 1 に等しい，また，MPC がゼロに等しいという帰無仮説を検定しなさい．その結果を用いて,

「MPC がゼロと 1 のあいだにある」という仮定が妥当かどうか述べなさい．また,「APC が可処分所得の減少関数である」という仮説について同様に検討しなさい（10 点）.

MPC がゼロまたは 1 に等しいという帰無仮説は，$Y_{pd,t}$ の係数についての t 検定によって検定できる．係数がゼロという帰無仮説に対する t 統計量は 19.34，係数が 1 であるという帰無仮説に対する t 統計量は 6.97 であるから，ともに帰無仮説は棄却される.「MPC がゼロと 1 のあいだにある」という仮説は直接には検定できないものの，推定された係数がゼロとも 1 とも統計的に有意に異なり，また，ゼロと 1 のあいだにあることから，妥当であると考えられる.「APC が可処分所得の減少関数である」という仮説は定数項についての t 検定によって検定できる．定数項がゼロであるという帰無仮説に対する t 統計量は 6.18 であり，仮説は有意に棄却される.

3) (2) の結果の内的妥当性を損なっている要因を 4 つ挙げなさい（10 点）.

サンプルサイズ 10 の時系列マクロデータを用いていることに注意すると，考えられる要因は以下のとおりである．(1) 観測値が 10 個と小さいため，t 統計量の分布を正規分布で近似できているかどうか疑わしい（small sample の問題）．(2) マクロの消費が，マクロの可処分所得のみで決定されているとは考えにくく，利子率・資産・インフレ率などの他の決定要因が考慮されていない（omitted variable の問題）．(3) 消費関数が可処分所得に対する単純な線形関数であるとは想定しにくく，なんらかの非線形性がある疑いがある（functional form の問題）．(4) マクロの消費，可処分所得はいずれも 2 次統計によって得られるものであり，観測誤差が多いと思われる（errors-in-variables の問題）．(5) マクロ経済を考えると，可処分所得は消費に依存して決まるから，可処分所得と消費のあいだに逆の因果関係も存在する（simultaneous causality の問題）.

4) Simon Kuznets 以来，APC はおおむね一定の値を取ることが知られており，実物的景気循環理論の文脈でいうところの “great ratio” の一つともされています．Milton Friedman はこの 2 つの現象に基いて恒常所得仮説を提唱しました．Friedman は，消費・所得ともに測定誤差を伴って観測されていると考えました．すなわち，観測される消費 $\tilde{C}_t$，所得 $\tilde{Y}_t$ は，誤差項 v_t, w_t を用いて

$$\tilde{C}_t = C_t + v_t, \quad \tilde{Y}_t = Y_{pd,t} + w_t$$

と表わされるとします．また，恒常的な消費と所得には比例的な関係,

$$C_t = kY_{pd,t} + u_t$$

が成り立っており，MPC と APC は等しく，一定であるとします．ここで，実際に観測される消費を所得に単回帰すると，MPC の推定量はゼロへのバイアスをもち，定数項

はゼロより大きくなるバイアスをもつこと（(b) のような結果を得やすいこと）を説明しなさい．簡単化のため，v_t, w_t, u_t は互いに独立で，それぞれ独立に同一の分布に従うと仮定しなさい（15 点）．

説明変数に誤差項と無相関な観測誤差が乗っているから，希釈バイアスが発生して係数推定量はゼロ方向にバイアスをもつ．ここでは真の値が正の値と想定されているから，過小バイアスとなる．単回帰では，定数項は被説明変数の平均値から，説明変数の平均値にその係数推定値を乗じたものを引いて推定されるから，定数項の推定量は逆にゼロより大きくなるバイアスをもつ．

$C_t = kY_t + u_t$[1]に観測される変数を代入すると，推定される式は，

$$\tilde{C}_t = k\tilde{Y}_t - kw_t + u_t + v_t$$

となる．これを単回帰で推定するときの定数項を β_0，傾きを β_1 とし，推定量にはハットをつけて表す．測定誤差がないときの真の値は $\beta_0 = 0, \beta_1 = k$ である．さて一般に，単回帰の説明変数を X，誤差項を u とするときに傾きの推定量は

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1 + \frac{\mathrm{cov}(u, X)}{\mathrm{var}(X)}$$

であるから[2]，本問での推定量については，各誤差項がそれぞれ独立だから，

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 \quad &\xrightarrow{p} \quad k + \frac{\mathrm{cov}(-kw_t + u_t + v_t, Y_t + w_t)}{\mathrm{var}(Y_t + w_t)} = k + \frac{-k\sigma_w^2}{\sigma_y^2 + \sigma_w^2} \\ &= \quad \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_w^2} k < k\end{aligned}$$

となり，OLS 推定量はゼロ方向へのバイアスをもつ．定数項も同様に，各誤差項がそれぞれ独立であることから，

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \overline{\tilde{C}_t} - \hat{\beta}_1 \overline{\tilde{Y}_t} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \overline{\tilde{Y}_t} - kw_t + u_t + v_t - \hat{\beta}_1 \overline{\tilde{Y}_t} \\ &= \beta_0 + (k - \hat{\beta}_1)\overline{\tilde{Y}_t} - kw_t + u_t + v_t \xrightarrow{p} \beta_0 + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_y^2 + \sigma_w^2} k\mu_y > 0\end{aligned}$$

となるので，ゼロより大きくなるバイアスをもつ．

記述問題 2：配点 40 点

中央政府から地方政府への特定補助金が，地方政府の政策決定に与える効果を検証することにしました．被説明変数として地方政府の政府投資と政府消費の比（$Y_i = G_i^K / G_i^C$），

[1] 表記の簡単化のため添え字の pd を省略．

[2] 教科書の Appendix 5.1 を参照．

説明変数として政府投資への補助率（K_i），政府消費への補助率（C_i）とその他の制御変数（$\mathbf{Z}_i$）を考え，回帰式を

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 K_i + \beta_2 C_i + \mathbf{Z}_i \gamma + u_i$$

とします．誤差項 u_i と説明変数 $\mathbf{Z}_i$ は相関をもたないものとして，以下の問いに答えなさい．

1) 地理的な要因の影響を調べるため，地方政府の位置によって地域を 3 つの区域に分類し，それぞれを代表するダミー変数を 3 つ作成しました．説明変数ベクトル $\mathbf{Z}_i$ のなかにこれら 3 つのダミー変数を加えて統計パッケージで推定しようとしたところ，エラーメッセージが出て推定することができませんでした．それはなぜか,（データが読み込めなかったなどの理由ではなく，計量経済学的な）理由を答えなさい（5 点）．

   推定式にはすでに定数項が含まれているから，地域を表すダミー変数をすべて加えると，これらの変数間で完全な多重共線性が発生し，OLS 推定量が定義できなくなるから．

2) 中央政府が設定する補助率は，多くの政府投資や政府消費を行おうとする地方政府へ高く設定される傾向があるため，K_i と C_i の係数推定量には同時性バイアスが発生するものと考えられるとします．このバイアスを除去するため，2 段階最小 2 乗法を用いることにしました．2 段階最小 2 乗推定値を得るためには，2 段階の OLS を行うことになりますが，それぞれの段階における被説明変数・説明変数はなにか，述べなさい（10 点）．

   1 段階目の推定では，内生変数を外生変数に回帰する．つまり，K_i を外生変数 $\mathbf{Z}_i$ と操作変数，C_i を外生変数 $\mathbf{Z}_i$ と操作変数，にそれぞれ回帰して当てはめ値を得る．2 段階目では，これらのあてはめ値を用いた推定を行う．すなわち，被説明変数は Y_i，説明変数は K_i の当てはめ値，C_i の当てはめ値，$\mathbf{Z}_i$ である．

3) 操作変数として過去の K_i と C_i を用いることにしました．1 期前の K_i と C_i を操作変数として 2 段階最小 2 乗推定を行い，J 統計量を計算したところ，ゼロになりました．ここから，操作変数の外生性についてなにか言えることはあるか，述べなさい（10 点）．

   内生変数 2 個に対して説明変数から除外された操作変数も 2 個であるから，この推定は丁度識別となっており，J 統計量はつねにゼロとなる．したがって，J 統計量から操作変数の外生性について何も述べることはできない．

4) 操作変数として 1 期前と 2 期前の K_i と C_i を用いて 2 段階最小 2 乗推定を行ったところ，次のような推定結果を得ました（カッコ内は標準誤差）．操作変数は適切といえるか，2 つの点から検討しなさい（10 点）．

   操作変数の適切さは，その外生性と妥当性によって検証できる．外生性を判断する助けのひとつとなるのが Hansen の J 統計量である．この推定結果では J 統計量は 1.595 と小さな値になっており，直交条件がすべて満たされ

表 1: 推定結果

	OLS	IV
K_i	1.589	2.683
	(0.966)	(8.487)
C_i	-5.629	-13.868
	(1.203)	(2.413)
Z_{1i}	-9.263	-7.742
	(0.784)	(1.264)
Z_{2i}	0.260	0.192
	(0.117)	(0.116)
サンプルサイズ	989	989
Hansen's J	—	1.595
R^2	0.8265	0.8170

ているという帰無仮説を棄却できない．それゆえ，操作変数の外生性には問題がないと思われる．妥当性は，内生変数と操作変数の相関の強さによって判断される．内生変数が 1 個であれば，除外された操作変数についての F 統計量によって判定できるが，ここでは内生変数は 2 個であり，また関連する F 統計量や相関係数についても報告されていない．それゆえ，妥当性については判断できない．これらをまとめると，操作変数の適切さについて判断するにはいまだ材料が不足している．

講評など

平均点は 65.1 点でした．

多岐選択： 平均正答率は 10 問中で 7.5 点でした．3 個以上間違えた人はよく復習しておきましょう．

記述問題 1： **3)** で，誤植があったためか，内的妥当性をおびやかすものとして「サンプルセレクションバイアス」を挙げたひとがいました．国際比較データを用いた場合などにはこれも問題になりますが，1 国のマクロ経済データを扱っている限りにおいてはサンプルセレクションバイアスを取り上げるよりはほかの問題のほうが深刻なように思えます．配点は 10 点ですが，1 つ落とすと 2 点，2 つ落とすと 5 点減点しています．解答例では 5 つ挙げていますが，このうち 4 つ挙がっていれば 10 点です．**4)** では数式による証明は求めていません（解答例に載せているのは参考のためです）．希釈バイアスが発生して傾きがゼロ方向にバイアスをもち，その結果として定数項が大

きくなるということが説明できればよかったですが，あまり出来は良くなかったようです.

記述問題 2： **2)** は 2 段階最小 2 乗法の基本的な手続きを答えるものですが，操作変数に名前を与えていなかったためか，1 段階目の推定を間違って書いている人が目立ちました．**3)** は「何も言えない」が正解ですが，系列相関がありそうに思えるので妥当だ，等と書いた答案がありました．過去値と相関をもつのは操作変数の妥当性に関する条件のはなしで，外生性とは関係ありませんから注意しましょう．**4)** も，外生性は満たされるが妥当性は分からない，が正解ですが，R^2 の数値が変化したからなんだかんだ，等と述べている答案もありました．操作変数の適切さの議論に R^2 は関係ありませんし，説明変数の t 値も関係ありません．また，Hansen の J 統計量が「小さいから外生性が満たされない」といった類の誤解も目立ちました．Hansen の J 統計量が検定している帰無仮説は「直交条件がすべて満たされている」ですから，分析者としては J 統計量が小さく，帰無仮説が棄却**されない**ほうが都合がいいことが多いです．**記述問題 2** についてはなんだか甘い採点になりました.

期末レポートに期待しています.