

# 回帰分析の評価 (1)

別所俊一郎

2006年6月9日

## *Today's attraction*

- 内的妥当性と外的妥当性
- 内的妥当性をおびやかすもの：5つのバイアス
- それぞれへの対処法：IV

## 統計的推測の評価

回帰分析を用いた分析は信頼できるのか？

- 独立変数（説明変数）から被説明変数への因果関係を見るのに有用な推定量か？
- もしそうでないとしたら，それはなぜか．あるいはどういうときか．その対処法は？

統計的手法を用いた実証分析の評価

- 回帰分析のみを対象とはしない
- 内的妥当性（internal validity）と外的妥当性（external validity）は満たされているか
- これらの妥当性が失われるのはどのようなときか

「因果関係」について考えてみよう：相関関係とはどう違うか？

## 妥当性 ( validity )

統計的手法を用いた研究を評価する枠組み

内的妥当性 ( internal validity ) 検討の対象としている母集団について、因果関係についての統計的推測が適切であること

外的妥当性 ( external validity ) 得られた統計的推測や結論が、異なる母集団へも一般化可能であること

母集団・制度についての注意

研究対象となっている母集団 Population studied 標本が抽出された母集団

興味の対象となっている母集団 Population of interest 推測や結論・因果関係を適用しようとしている母集団

設定 setting 制度的・法的・社会的・経済的諸環境のこと・実験室での出来事がそのまま農地へと適用可能か?

## 内的妥当性が失われるとき

内的妥当性とは?

- 因果関係の大きさを示すものとして得られた推定量が，不偏性と一致性を持つ
- 仮説検定が所望の有意水準を持ち，信頼区間が所望の信頼水準を持つ

OLS の仮定が満たされなければ，OLS 推定量は内的妥当性を持たない

- $E[u_i | X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}] = 0$
- $(\mathbf{X}_i, Y_i) \sim \text{i.i.d.}$
- $0 < E[X_{ji}^4] < \infty, 0 < E[Y_i^4] < \infty$
- 完全な多重共線性が発生していない

## 外的妥当性が失われるとき

研究対象となる母集団と，興味の対象となる母集団・設定が異なる

- 母集団が異なる
  - マウスの実験結果が人間に当てはまるか?
  - カリフォルニアの小学校のデータを用いた結果は，大学生に適用可能か？ 他州の小学校には？
  - どのような違いがあれば妥当性が失われるのか？：特性・地域・時代・時期
- 設定が異なる
  - 制度的・法的規制・物理環境の違い
  - タバコ消費の価格弾力性は，喫煙年齢が違ってても適用するか？

## 外的妥当性が失われるとき

外的妥当性の評価は？

- 計量経済学上の知識だけではなく、母集団や設定についての知識が必要
- 似ているが異なる集団を対象とした研究との比較：結果が異なるからといってすぐに外的妥当性が失われるというわけでもない
- 研究を始める前から準備する必要があるかもしれない

## 回帰分析での内的妥当性 ( internal validity )

内的妥当性が満たされているとは？

- 推定量が不偏性と一致性をもつ
- 仮説検定 ( 信頼区間 ) が所望の有意水準を達成している

内的妥当性が失われる原因 5 つ :  $E[u|\mathbf{X}] \neq 0$

- Omitted variables
- Misspecification of the functional form
- Errors in variables / measurement error
- Sample selection
- Simultaneous causality

## Omitted variables

被説明変数  $Y$  の決定要因であり，かつ，説明変数  $X$  のどれかと相関する変数が説明変数から省略されている場合にバイアスが発生

- 対処方法は，データの利用可能性に依存

省略された変数が観測可能な場合

- 回帰変数として加える...のも
  - Pro：バイアスを減らす
  - Con：真の係数がゼロであるときには，他の説明変数の推定の正確さを減らす
- 次のようなステップを踏む
  1. 分析の鍵となる変数（係数）を同定する：興味のある変数を決める
  2. 重要な omitted variables bias をもたらしそうな変数を特定する：



- 経済理論 , expert judgement
  - 実際に回帰を「走らせる」前に (アприオリに) 考える
  - 基本ケース (base specification) を決める
  - 追加的な疑わしい変数のリストも作る
3. 変数を追加した拡張ケース (alternative specification) の推定を行い . 追加的な係数について検定を行う
- 追加的な係数が統計的に有意か , 鍵となる係数が大きく変化するようであれば基本ケースに取り込む
  - そうでなければ基本ケースからは除外してよい
4. 結果を適切な表にまとめる
- Academically honest に full disclosure する
  - 疑り深い読者は (テキストではなく) 表から自分なりの判断をするかもしれない

## Omitted variables

省略された変数が観測不可能な場合

- 回帰変数として付け加えることはできない
- 同じ主体で時点が異なるデータ（パネルデータ）を用意する．省略された変数の効果が通時的に不変であれば，その効果を制御（control）できる場合がある
- 操作変数法（Instrumental Variable）を用いる． Ch.10
- 実験データ（Randomized Controlled Experiment）を用いる．  
Ch.11

## 関数形の特定化の誤り

Misspesification of the functional form

- Omitted variables の一種とも考えられる：非線形性を表す項が省略された
- 対処法 1：被説明変数が連続であれば，6章での手続きを用いる
- 対処法 2：被説明変数が離散であれば，もっと複雑． Ch.9

## 観測誤差 Errors-in-variables

### 観測誤差が発生する原因

- 回答者が正しい回答をしない
  - 見落とし・入力ミス・転記ミス...
  - 記憶違い (retrospective bias): 日記形式, キリのいい数字
  - 理論との不整合性
- OLS 推定量はゼロの方向へバイアスを持つ
  - 希釈バイアス (dilution bias) ということもある
  - 説明変数の真の実現値に観測誤差が「乗っかって」いるとすると, 観測された値の分散が大きくなるため, 被説明変数の変動を説明するにはその係数は小さくてもよいから

被説明変数に観測誤差が乗っていても問題にならないことが多い。

## 稀釈バイアスの数学的説明

説明変数の真の実現値を  $X_i$  , 観測値を  $\tilde{X}_i$  , 被説明変数を  $Y_i$  , 本来の誤差項  $u_i$  とする単回帰モデルを考えると ,

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{X}_i + \beta_1 (X_i - \tilde{X}_i) + u_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 \tilde{X}_i + v_i \end{aligned}$$

この測定誤差  $X_i - \tilde{X}_i$  が  $\tilde{X}_i$  と相関していると ,  $E[v_i | \tilde{X}_i] \neq 0$  となるので ,  $\hat{\beta}_1$  は一貫性を持たない . バイアスの大きさは相関の程度や , 測定誤差の性質に依存するが , いま , 測定誤差  $w_i = \tilde{X}_i - X_i$  が他の変数とは独立で i.i.d. であるとすれば ,

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{X}_i, u_i) &= 0, \quad \text{cov}(\tilde{X}_i, w_i) = \text{cov}(X_i + w_i, w_i) = \text{var}(w_i) = \sigma_w^2 \\ \text{cov}(\tilde{X}_i, v_i) &= \text{cov}(\tilde{X}_i, -\beta_1 w_i + u_i) = -\beta_1 \sigma_w^2 \end{aligned}$$

であるから ,

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1 - \beta_1 \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{\tilde{X}}^2} = \beta_1 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_w^2}, \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_w^2} < 1$$

それゆえ , OLS 推定量はゼロの方向へバイアスを持つ .

## 観測誤差への対処法

- 説明変数の正しいデータを集める（可能なら）
- 操作変数法：説明変数と相関し，かつ，観測誤差と無相関な変数を見つける
- 観測誤差を明示的に考慮したモデルを構築する：データの取り方などに依存

## サンプルセレクション Sample selection

被説明変数の値によって観測値が選択されてしまうような抽出過程であれば、データの利用可能性が変化

- 誤差項と説明変数の間に相関が発生
- 被説明変数の値に関係なく観測値が選択されるのであれば問題にならない

(例) 賃金関数の推定

- 賃金は働いている人についてしか観測できない
- 職がある(働いている)ということに影響する変数が賃金にも影響を与えるので、説明変数と誤差項が相関

対処法：最尤法を用いる (Ch.9)

## 双方向の因果関係 Simultaneous causality

X Y だけではなく, Y X の逆の因果関係があるばあい

- 数学的には, 連立方程式 (同時方程式) 体系で表現できるため, 同時方程式バイアスや同時バイアスとも呼ばれる

(例) クラスあたり児童数と標準テストの成績

- 想定されていたのは「先生あたり児童数が減れば教育効果が上がってテストの成績が上がる」
- 「テストの成績の悪い学校には補助金を多くつけて, 少人数教育を行わせる」という逆の因果関係もありえる
- この場合, 想定していた因果関係がなかったとしても, クラスあたり児童数と成績には正の相関が発生する



数式で書いてみると，

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \\ X_i = \gamma_0 + \gamma_1 Y_i + v_i \end{cases}$$

X → Y の因果関係を示す第 1 式の誤差項  $u_i$  の値が大きくなると， $Y_i$  の値が大きくなり， $\gamma_1 > 0$  ならば，Y → X の因果関係を示す第 2 式の関係から  $X_i$  の値が大きくなる傾向がある．したがって，第 1 式の誤差項  $u_i$  と説明変数  $X_i$  が正の相関を持つ．

対処法：

- 操作変数法 (Instrumental Variable) を用いる． Ch.10
- 実験データ (Randomized Controlled Experiment) を用いる．  
Ch.11

## 推定量の標準誤差の一致性

検定や信頼区間の形成において所望の有意水準を達成しない

- 繰り返しサンプルをとったときに、5%の有意水準の棄却域に5%の確率で落ちるか?
- 繰り返しサンプルをとったときに、95%信頼区間に真の値が95%の確率で含まれるか?

OLS 推定量の標準誤差  $\text{var}(\hat{\beta})$  の推定量  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta})$  の一致性の問題

誤差項の仮定

- 分散不均一：分散不均一に頑健な標準誤差を使えばよい
- 観測値間で誤差項が相関

## 誤差項の相関

観測値間で誤差項が相関

- 標本抽出が無作為で,  $(\mathbf{X}_i, Y_i)$  が i.i.d. なら起きない
- ここで考えているのは,

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \cdots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\ Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \cdots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + u_n \end{array} \right.$$

において,  $\text{corr}(u_l, u_m | \mathbf{X}) \neq 0 (l \neq m)$  となってしまうこと

## 誤差項の相関

- 1つの主体のデータを集めた時系列データでしばしば観測される：系列相関 (serial correlation)
- 地域的に隣り合った主体間でも発生しうる：空間的自己相関 (spacial autocorrelation)

OLS 推定量は 不偏性・一致性を持つ が、標準誤差が一致性を持って推定されない Ch.12

- 仮説検定が「正しく」行われない
- 信頼区間が「正しく」形成されない