

## 財政論 宿題解答

2012年6月

担当：別所俊一郎

### 宿題8

#### (a) 問題

山内くん ( $Y$ )、堀尾くん ( $H$ )、中村くん ( $N$ ) が同じアパートに住んでいるとしよう。堀尾くんと中村くんは同じところで働いており、同じ所得  $m$  を得ている。山内くんは残念ながら失業中で、所得はない。堀尾くんと中村くんは山内くんを経済的に支援するのにやぶさかではなく、働いている二人の効用関数は  $U_i = 2c_i^{1/2} + c_Y^{1/2}$ , ( $i = H, N$ ) で与えられる。山内くんは堀尾くんと中村くんから受け取る所得を全て消費し、堀尾くんと中村くんは山内くんを支援した残りを全て消費する。

1. Nash 均衡において堀尾くんと中村くんが山内くんに渡す移転額 ( $z_H, z_N$ ) を求めよ。
2. 堀尾くんと中村くんは話し合っ、2人の効用の和を最大にするように、2人で同じ額 ( $\hat{z}$ ) を山内くんに渡すことにした。このときの  $\hat{z}$  を求めよ。また、(a) の結果と比較し、移転額が異なる場合にはその経済学的理由について簡潔に述べよ。

#### (b) 解答

1. 堀尾くん、中村くん、山内くんの予算制約式は

$$c_H + z_H = m, \quad c_N + z_N = m, \quad c_Y = z_H + z_N$$

で与えられる。堀尾くんの最適化問題は、中村くんの行動を所与として

$$\max_{c_H, z_H} U_H = 2c_H^{1/2} + c_Y^{1/2} \text{ subject to } c_H + z_H = m, \quad c_Y = z_H + z_N$$

と表される。予算制約を効用関数に代入すると

$$\max_{z_H} U_H = 2(m - z_H)^{1/2} + (z_H + z_N)^{1/2}$$

となるので、 $z_H$  で微分して1階の必要条件を求めると

$$\frac{dU_H}{dz_H} = -2(m - z_H)^{-1/2} + (z_H + z_N)^{-1/2} = 0$$

整理していくと

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{m - z_H}} &= \frac{1}{\sqrt{z_H + z_N}} \\ \frac{4}{m - z_H} &= \frac{1}{z_H + z_N} \\ 4(z_H + z_N) &= m - z_H \\ z_H &= \frac{m - 4z_H}{5}\end{aligned}$$

同様に中村くんについても

$$z_N = \frac{m - 4z_N}{5}$$

が最適反応関数となるので、これらを連立させて解くと

$$z_H = z_N = \frac{m}{9}$$

2. 堀尾くん、中村くん、山内くんの予算制約式は

$$c_H + \hat{z} = m, \quad c_N + \hat{z} = m, \quad c_Y = 2\hat{z}$$

で与えられる。これらを堀尾くんと中村くんの効用関数に代入すると、最大化すべき関数は

$$\begin{aligned}2(m - \hat{z})^{1/2} + (2\hat{z})^{1/2} + 2(m - \hat{z})^{1/2} + (2\hat{z})^{1/2} \\ = 4(m - \hat{z})^{1/2} + 2(2\hat{z})^{1/2}\end{aligned}$$

となる。 $\hat{z}$ で微分して1階の必要条件を求めると

$$\frac{-4}{\sqrt{m - \hat{z}}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\hat{z}}} = 0$$

整理すると

$$\hat{z} = \frac{m}{3}$$

この量は、堀尾くんと中村くんがNash的に行動したときの移転額よりも大きい。これは、山内くんの消費量 $c_Y$ が堀尾くんと中村くんにとって公共財となったため、Nash的な状況では過小に供給されたためと解釈できる。