

## 測定にまつわる問題

別所俊一郎<sup>1</sup>

経済全体や分配の状況を評価する道具の一つとして社会厚生関数を考えることができるが、実際に観察・観測可能な指標によって評価を行うためにはどのような点に注意しなければならないのか、またどのような指標が開発され、利用されているのか。所得の定義、不平等度指標、貧困指標に着目する。

### M3.2. 所得の計測

「所得 income」を基準にして経済の状況を評価しようとする場合<sup>2</sup>、静学的で不確実性がない場合を除けば、所得をどのように評価するかという点にもいくつか問題がある。

- Fisher は pleasurable experience から労働の不効用を差し引いたものと定義したが、労働の不効用は計測しにくい
- Hicks は期末の効用を期首から変化させないで消費できる最大額と定義したが、意図せざる収入の扱いが困難
- Simons はより操作的な定義として、期間内の消費の市場価格と資産変化額の和と定義。包括所得税の考え方に継承される。

後ろ向きで包括的な定義として Simons の所得の定義がよく使われるが、正確に計測できるかどうかはまた別問題<sup>3</sup>。

### M3.3. Equivalent scales

所得を厚生代理指標と考えるとき、しばしば所得は世帯単位で報告される。世帯構成が異なれば、世帯としての所得が同じであっても厚生水準は異なると考えるのが自然。世帯構成を調整したあとの所得尺度を Equivalent scales と呼ぶ。調整されるべき要素はおもに demographic variables (年齢・性別)。

必要限度の測定 最低限の生活に必要な消費財の組合せを決めて、その市場価格を評価する。最低生活以上の部分について評価しているわけでもなく、人口的要因の費用を直接計測しているとも言い難い。

Engel, Rothbarth の方法 家計の行動の結果としての特定の財の消費量に注目し、世帯構成員の厚生水準と強く連動するような指標から判断する。

<sup>1</sup>bessho [at] econ.hit-u.ac.jp . 間違いがあったらすぐにお知らせください。

<sup>2</sup>消費から効用を得ているという点からすれば、所得ではなくて消費を基準にするべきだという考え方もあるが、多分に実際の計測上の問題から、消費よりも所得に着目することが多い。

<sup>3</sup>未実現のキャピタルゲインやフリンジベネフィット等、現金化されないものの取扱いや、回答の正しさにまつわる問題がある。たいがいはばあい、所得データは概数でしか得られず、利子所得等は見落されがち。

- Engel : 所得に占める食物支出の比率は所得 (厚生) が増加するとともに減少するから, エンゲル係数が等しい世帯の厚生は等しいとみなす. 経験的にはもっともらしいが, (1) 理論的背景に乏しい, (2) 食物支出が比較的多い子供の費用を過大評価する可能性がある. 食費以外の生活必需品を取り込んだ指標もありうる.
- Rothbarth : 成人がおもに消費する adult goods (たばこ, アルコールなど) に着目. これらの財の消費が所得効果のみで変化すると仮定すれば, adult goods の消費量で厚生を評価できる. たばこ・アルコール消費の所得弾力性は低く, また equivalent income の比が所得水準によって異なるという問題点

**Prais and Houthakker の方法** 家族構成が世帯の消費構造に与える効果の大きさを実証し, その結果を利用する.

**Barten の方法** 世帯の効用関数を利用して導出. いま, タイプ  $d$  の家計  $h$  の財  $i$  の消費量  $x_i^h$  が, 大人  $a^i(d)$  人分の消費に等しいとして,  $\hat{x}_i^h = x_i^h / a^i(d)$  とおく. このとき, 家計  $h$  の効用と支出関数は,

$$U^h = U^h \left( \frac{x_1^h}{a^1(d)}, \dots, \frac{x_n^h}{a^n(d)} \right) = U^h (\hat{x}_1^h, \dots, \hat{x}_n^h) \quad (3.4)$$

$$E^h(\hat{p}, U^h) = \min[\hat{p}\hat{x}^h | U^h(\hat{x}^h) \geq U^h] \quad (3.7)$$

それゆえ equivalent scale は, 効用一定のときの支出比により与えられ,

$$\frac{E(a^1(d)p_1, \dots, a^n(d)p_n, \bar{U})}{E(a^1(\tilde{d})p_1, \dots, a^n(\tilde{d})p_n, \bar{U})} \quad (3.9)$$

より一般的には,  $U^h = \Phi(u(x^h, d), d)$  とおいて, 同様に支出関数により  $E^h(p, d, U^h) / E^h(p, \tilde{d}, U^h)$  によって equivalent scale を求めることができる. もし equivalent scale が効用水準に依存しなければ, 価格と世帯のタイプのみの関数で表現されるが, 実証的には支持されない

実際に用いられる指標 よい近似としてしばしば用いられるのは, 世帯人数  $d^h$  と弾力性  $\varepsilon$  に対して

$$\hat{M}^h = \frac{M^h}{(d^h)^\varepsilon} \quad (3.16)$$

弾力性  $\varepsilon$  としては, 0.75, 0.55, 0.36, 0.25 などが用いられる. 0.5 も多用される.

Equivalent scales による修正は, 世帯単位の所得を厚生代理指標として使うための手段だが, 世帯内の集計・資源配分や社会選択の問題は残る

### M3.4. 不平等度の計測

家計の所得<sup>4</sup>を少ないほうから順に並べ,  $M^1 \leq M^2 \leq \dots, M^H$  とする. 平均所得は

$$\mu = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H M^h, \quad \text{連続なら,} \quad \mu = \int_0^{\bar{M}} M \gamma(M) dM \quad (3.18)$$

<sup>4</sup>Equivalent scales による修正を施したのちの所得.

不平等度指標は、この分布の不平等度を  $[0, 1]$  で評価する関数だから、 $I: \mathbf{R}^H \rightarrow [0, 1]$  あるいは  $I: C[0, \bar{M}] \rightarrow [0, 1]$  . 所得分布に順序をつけるための関数 .

Pigou-Dalton 基準：所得の多い世帯から少ない世帯への少額の移転は不平等度を下げる .

### 統計的な尺度<sup>5</sup>

Lorenz Curve 不平等尺度ではない . 横軸に累積頻度、縦軸に累積所得をとり、それぞれ 1 に基準化したもの .

$$\left( \int_0^m \gamma(M) dM, \frac{1}{\mu} \int_0^m M \gamma(M) dM \right) \quad (3.18)$$

「曲線が常に上 / 下にある」で分布に順序をつけることができる . 内側にあるほうの分布が Lorenz dominate している、という . Lorenz curve は交差することもあるので、分布の組合せのすべてに順序をつけられるわけではない .

一般化 Lorenz curve 縦軸を平均で基準化したもので、原点と  $(1, \mu)$  をつなぐ .

$$\left( \int_0^m \gamma(M) dM, \int_0^m M \gamma(M) dM \right) \quad (3.40)$$

縦軸が所得の平均値を反映している .

Gini 係数 いくつかの同値な定義がある . Lorenz curve と 45 度線のあいだの面積の 3 角形の面積に対する比率でもある .

$$G = 1 + \frac{1}{H} + \frac{2}{H^2 \mu} (M^H + 2M^{H-1} + \dots + (H-1)M^2 + HM^1) \quad (3.21)$$

$$G = 1 + \frac{1}{H} + \frac{2}{H^2 \mu} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \min(M^i, M^j) \quad (3.22)$$

定義から、 $0 \leq G \leq 1$  . Lorenz curve によって順序をつけることのできない組み合わせにも順序をつけることができるから、不平等の評価についてなんらかの追加的な仮定がある .

Pigou-Dalton 基準を満たす . じっさい、 $M^i > M^j$  なる  $i$  から  $j$  への  $\Delta M$  だけの移転を行うと、

$$\Delta G = \frac{-2}{H^2 \mu} (j-i) \Delta M < 0 \quad (3.23)$$

Gini 係数の変化の大きさは、 $i$  と  $j$  の順位の差に依存する<sup>6</sup> .

Theil のエントロピー尺度 情報理論にもとづく指標 .

$$T = \frac{1}{H \log H} \sum_{h=1}^H \frac{M^h}{\mu} \log \frac{M^h}{\mu} \quad (3.24)$$

Pigou-Dalton 基準を満たす . 移転によるタイル尺度の変化は相対的な所得の大きさに依存 .

<sup>5</sup>標準偏差や変動係数等の指標も用いられる .

<sup>6</sup>再分配前後の Gini 係数の変化率のことを「再分配係数」と呼ぶことがあるが、解釈は難しい . 豊田 (1987) 参照 .

## 統計的尺度と社会厚生

どの不平等尺度を用いるか、には社会厚生をどう判断するかという問題が付随している。明示的に社会厚生関数を考えずに利用可能な不平等尺度とはどのようなものか。それぞれの不平等尺度は背後になんらかの社会厚生関数を仮定しているのか。

**準備** 要素が非負で行・列の和が1になるような行列を bistochastic matrix と呼び、 $Q$  で表わす。bistochastic でかつ各要素が1か0の行列を permutation matrix と呼び、 $P$  で表わす。所得ベクトル  $M$  に対して、 $\tilde{M} = QM$  で所得移転後の所得ベクトルを表現できる。社会厚生関数を  $W = W(M^1, M^2, \dots, M^H)$  とおく。すべての permutation matrix に対して  $W(M) = W(PM)$  が成り立つとき、社会厚生関数は対称的 symmetric であるという。すべての bistochastic matrix に対して  $W(QM) \geq W(M)$  が成り立つとき、社会厚生関数は Schur-concave であるという。また、すべての bistochastic matrix に対して  $I(QM) \leq I(M)$  が成り立つとき、不平等指標  $I$  は Schur-concave であるという。

**Reference-level-free** 社会厚生関数と、所与の厚生水準  $w$  に対して、距離  $D(w, M) = \max_{\lambda} \{\lambda > 0 | W(M/\lambda) \geq w\}$  を定義する。この距離  $D$  が  $w$  と  $M$  について分離可能であるとき、社会厚生関数  $W$  は Reference-level-free という。もし、不平等指標が reference-level-free であれば、対応する社会厚生関数も reference-level-free であり、逆も成り立つ (Blackorby and Donaldson 1978)

**対応する社会厚生関数** Blackorby and Donaldson (1978) によれば、Gini 係数、Theil 尺度に対応する社会厚生関数はそれぞれ、

$$W_G(M) = \frac{1}{H^2} (M^H + 3M^{H-1} + \dots + (2H-1)M^1) \quad (3.38)$$

$$W_T(M) = \frac{1}{H \log H} \left( H\mu \log H\mu - \sum_{h=1}^H M^h \log M^h \right) \quad (3.39)$$

## 社会厚生関数に基く指標

なんらかの社会厚生関数に基づいて不平等尺度を作ることにはできるか、検討してみよう。

いま、功利主義的な社会厚生関数  $W = \sum_{h=1}^H U(M^h)$  を想定する。関数  $U(\cdot)$  は基数主義的な効用関数とも、社会の与えている評価とも考えられる。ここで、達成されている社会厚生水準と同等の厚生水準を、全ての所得が等しいという制約のもとで達成しようとするときに必要な所得を equally distributed equivalent income  $M_{EDE}$  と呼び、以下で定義される (Fig. 3.6)。

$$\sum_{h=1}^H U(M^h) = HU(M_{EDE}) \quad (3.42)$$

このとき、Atkinson-Kolm index は、equally distributed equivalent income  $M_{EDE}$  を用いて

$$A = 1 - \frac{M_{EDE}}{\mu} = \frac{\mu - M_{EDE}}{\mu} \quad (3.43)$$

関数  $U(\cdot)$  が concave であれば,  $A$  は非負の値をとる. 具体的な  $U(\cdot)$  としてよく用いられるのは

$$U(M^h) = \frac{(M^h)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \quad (3.44)$$

パラメタ  $\varepsilon$  は  $U(\cdot)$  の concavity の程度を示しており, 不平等回避度 (degree of inequality aversion) とも呼ばれる.  $\varepsilon = 1$  のとき  $U(M^h) = \log M^h$ ,  $\varepsilon = 0$  のとき  $U(M^h) = M^h$ .

### 公理主義的な指標

不平等尺度  $I(M, H)$  が満たすべき公理を考え, それらを満たす尺度を探す.

**AI1: Symmetry (Anonymity)** すべての permutation matrix  $P$  に対して  $I(M, H) = I(PM, H)$

**AI2: Transfer** すべての bistochastic matrix  $Q$  に対して  $I(QM, H) \leq I(M, H)$

**AI3: Relative** すべての正数  $\lambda > 0$  に対して  $I(\lambda M, H) = I(M, H)$

**AI3': Absolute** すべての  $M + \tau e \geq 0$  なる  $\tau$  に対して  $I(M + \tau e, H) = I(M, H)$

**AI3'': Intermediate** すべての  $M + \tau[\mu M + (1 - \mu)e] \geq 0$ ,  $\mu \in (0, 1)$  に対して  $I(M + \tau[\mu M + (1 - \mu)e], H) = I(M, H)$

**AI4: Decomposability**  $G$  個のグループに分割するとき,  $w_g^G = \sum_{h=1}^{H_g} M^h / \sum_{h=1}^H M^h$  に対して,  
 $I(M_1, \dots, M_G, H) = \sum_{g=1}^G w_g^G I(M_g, H^g) + I(\mu_1 e_1, \dots, \mu_G e_G, H)$

これらの公理について, 以下の定理が成り立つ.

**定理 1 (3.3)** 不平等尺度が公理 *AI1*, *AI2*, *AI3*, *AI4* を満たすことは, その尺度が Theil のエントロピー尺度の正数倍であることと同値.

逆にいえば, Theil のエントロピー尺度以外の不平等尺度は, これらの公理のいずれかを満たしていない.

## M3.5. 貧困の計測

貧困の計測もまた, 不平等の計測に似て, 困難な点が多い.

### 絶対的貧困と相対的貧困

**絶対的貧困** 時代や地域に関係なく, 固定された最低生活水準があり, それを下回る生活 (消費・所得) を貧困と定義する. Rowntree の計測にはじまるものの, 受け入れられにくい.

**相対的貧困** 時代や地域に応じて, 「まっとうな」生活を送るために必要な消費や所得を欠いている状態を貧困と定義する. 社会参加や排除 (social inclusion/exclusion) の考え方に通じるところがある

## 貧困線 poverty line

ある水準より低ければ貧困と定義されるとき、その水準のことを貧困線とよぶ。貧困とそれ以外を明確に区分できるものではなく、貧困線の上下を行ったり来たりする世帯も多いことから、1つの貧困線のみを用いた評価が行われるわけではない。

Equivalence scale を調整したうえで、(1) 最低給付水準の 120% や 140%、(2) エンゲル係数の大きさ、(3) 中位所得の 50%、という形で定義される。日本では公的な貧困線は設定されていない。

## 標準的な指標

貧困線  $z$  を設定したうえで、貧困の状況を評価する代表的な指標は以下の 2 つ。

**Headcount ratio** 貧困線以下にいる世帯 / 個人の比率。「どれほど貧困か」を表現できない。

**Poverty gap, income gap** 貧困線との差を  $g^h \equiv z - M^h$  と定義し、貧困世帯数を  $q = q(M, z)$  とおくと、

$$\text{Poverty gap: } \sum_{h=1}^q g^h \quad (3.48)$$

$$\text{Income gap: } \frac{1}{q(M, z)} \sum_{h=1}^q \frac{g^h}{z} \quad (3.49)$$

所得の不足分について等しいウェイトを与えて評価している。

## 日本における計測

2000 年ごろから日本においても不平等や格差についての研究書が多く出版されるようになった。代表的な研究として、大竹 (2005)、橋木・浦川 (2006) を参照せよ。

不平等・格差の議論の影響で、貧困問題にも注目が集まっているようだが、こちらは社会学・福祉学分野での研究の蓄積もある。青木 (2003)、岩田 (2007) などを参照せよ。

## 参考文献

- [1] Atkinson, A.B. 1970. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory* **2**, 244-263.
- [2] Blackorby, C., D. Donaldson. 1978. Measures of relative inequality and their meaning in terms of social welfare. *Journal of Economic Theory* **18**, 59-80.
- [3] 青木紀. 2003. 現代日本の「見えない」貧困. 明石書店.
- [4] 岩田正美. 2007. 現代の貧困 ワーキングプア/ホームレス/生活保護. ちくま新書.
- [5] 大竹文雄. 2005. 日本の不平等. 日本経済新聞社.
- [6] 橋木俊詔・浦川邦夫. 2006. 日本の貧困研究. 東京大学出版会.
- [7] 豊田敬. 1987. 税の累進度と再分配係数. 「経済研究」**38**(2), 166-170.